$f(V_{n+1}) = f(U_{2n+2}) = U_{2n+3}$ donc $U_{2n+1} < U_{2n+3}$ et par suite

$f(U_{2n+1}) > f(U_{2n+3})$ d'où $U_{2n+2} > U_{2n+4}$ donc $V_{n+1} > V_{n+2}$.

d'où (V_n) est une suite décroissante

* $W_n = f(V_n)$

$W_{n+1} - W_n = f(V_{n+1}) - f(V_n)$ or $V_{n+1} < V_n$ et f est strictement décroissante

d'où : $f(V_{n+1}) > f(V_n)$ d'où $W_{n+1} > W_n$

conclusion : (W_n) est une suite croissante

et comme $\lim\limits_{n\to+\infty} (V_n - W_n) = 0$ $\left(|W_n - V_n| \leq \left(\frac{27}{98}\right)^{2n} |W_n - V_n|\right.$

$\left.\text{et } \lim\limits_{n\to+\infty} \left(\frac{27}{98}\right)^{2n} = 0\right)$

d'où (V_n) et (W_n) sont deux suites adjacentes et par suite elles convergent vers la même limite ℓ.

5°/ $\begin{cases} \lim\limits_{n\to+\infty} U_{2n} = \ell \\ \lim\limits_{n\to+\infty} U_{2n+1} = \ell \end{cases} \Rightarrow \lim\limits_{n\to+\infty} U_n = \ell$ (théorème de cours)

Solution 10 :

1°/ $\forall x \in \mathbf{R}$, $x^2 + 1 \neq 0$. f est continue, dérivable sur $\mathbf{R}$

$$\forall x \in \mathbf{R},\ f'(x) = \frac{(2x+1)(x^2+1) - 2x(x^2+x+1)}{(x^2+1)^2}$$

$$f'(x) = \frac{2x^3 + 2x + x^2 + 1 - 2x^3 - 2x^2 - 2x}{(x^2+1)^2} = \frac{-x^2+1}{(x^2+1)^2}$$

x	$-\infty$		-1		1		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	
$f(x)$	1	↘	$1/2$	↗	$3/2$	↘	1